PAB

Exercice 6.5: Distribution de Maxwell

Considérons un atome d'un gaz. La densité de niveaux d'énergie possibles est donnée par:

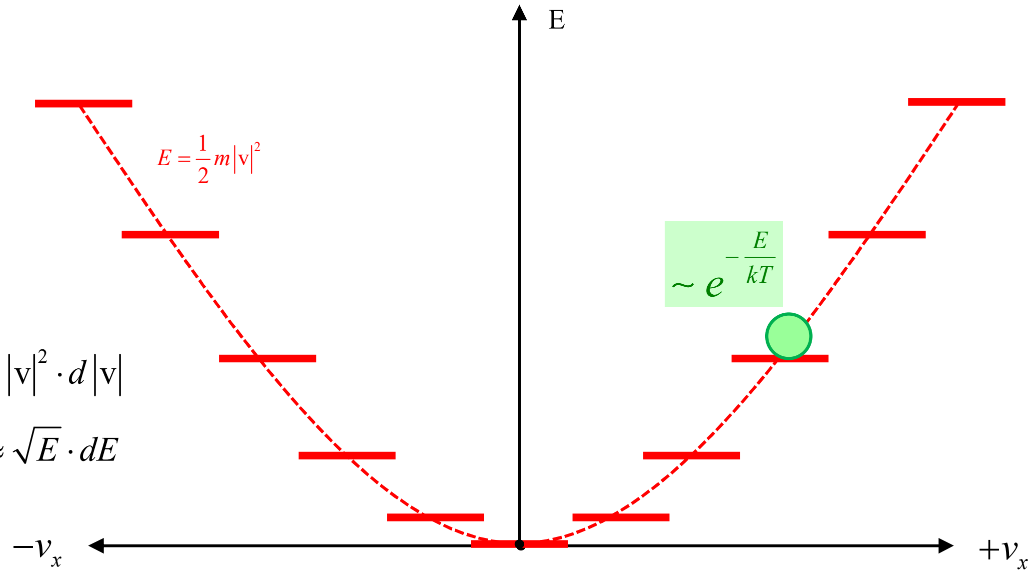
$$\boxed{\rho_{3D}(E) = const \cdot \sqrt{E}}$$

1) Déterminez la valeur de la constante en supposant une distribution de Boltzmann pour un seul atome

2) Pour N atomes de gaz, déterminez la distribution en vitesse absolue (distribution de Maxwell des vitesses)

PAB

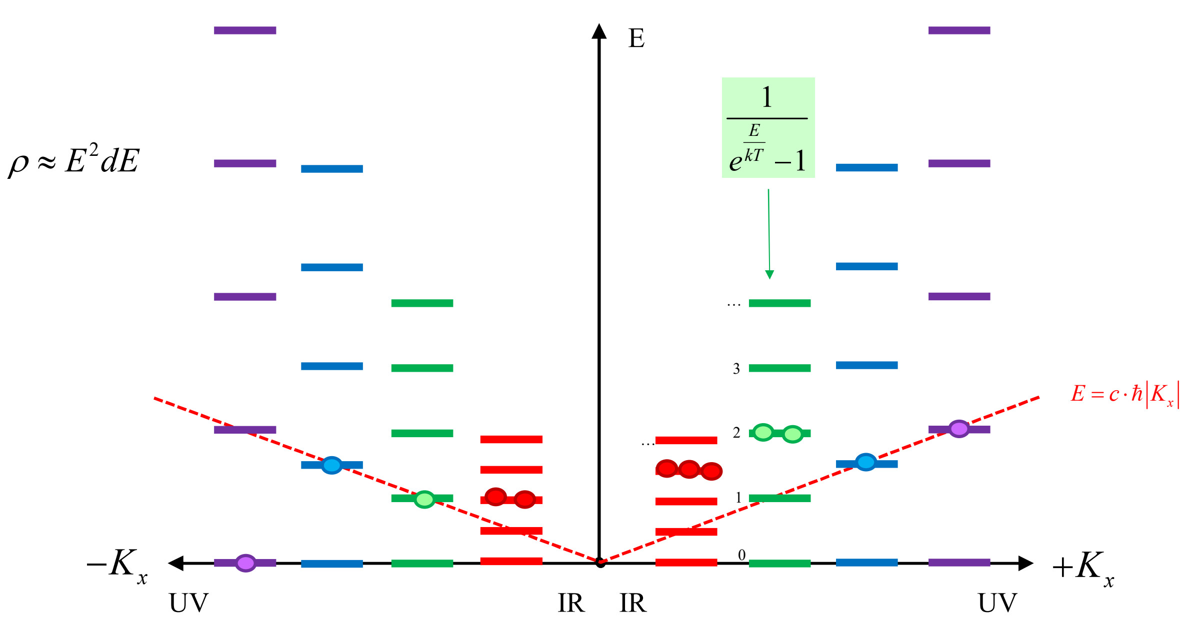
Gaz: Boltzmann, énergie quadratique
un seul atome à placer



$$\rho \approx |\mathrm{v}|^2 \cdot d|\mathrm{v}|$$
$$\approx \sqrt{E} \cdot dE$$

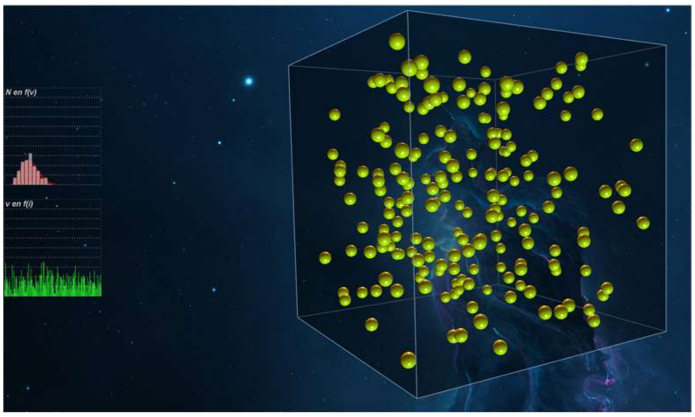
PAB

Photon: Bose-Einstein, énergie linéaire plusieurs photons possible dans le même mode



PAB

Théorie cinétique des gaz



Simulation: https://pcollette.go.yo.fr/gaz_GL.html

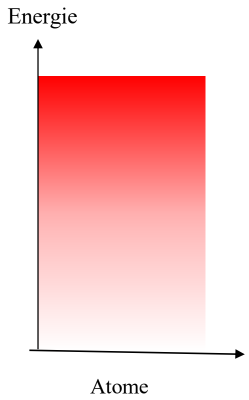
Théorie: https://pcollette.go.yo.fr/gaz_files/aide_gaz.htm

PAB

Exercice 6.5: Distribution de Maxwell
Energie moyenne par atome de gaz

Répartition régulière en vitesse
Quasi-continuum

$E = \frac{1}{2} m v^2$



$$\boxed{\rho_{3D}(E) = const \cdot \sqrt{E}}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E \cdot \rho_{3D}(E) \cdot F_B(E) \cdot dE}{\int_0^\infty \rho_{3D}(E) \cdot F_B(E) \cdot dE}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty const \cdot E^{3/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot dE}{\int_0^\infty const \cdot E^{1/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot dE} = \frac{3}{2} kT}$$

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty const \cdot E^{5/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot dE}{\int_0^\infty const \cdot E^{1/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot dE} - \langle E \rangle^2 = \frac{3}{2} (kT)^2$$

Pierre-André Besse p.25 2025

Utilisez:

$$\int_0^\infty E^{1/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot dE = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot (kT)^{3/2}$$

$$\int_0^\infty E^{3/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot dE = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \cdot (kT)^{5/2}$$

$$\int_0^\infty E^{5/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot dE = \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \cdot (kT)^{7/2}$$

Distribution de Maxwell

PAB

Normalisation

$$1 = \int_0^\infty \rho_{3D}(E)\cdot F_B(E)\cdot dE = const\cdot \int_0^\infty E^{1/2}\cdot e^{-\frac{E}{kT}}\cdot dE \quad \Rightarrow const = \frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot (kT)^{3/2}}$$

Distribution de Maxwell:

$$D(E)\cdot dE \equiv N\cdot \rho_{3D}(E)\cdot F_B(E)\cdot dE = N\cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot (kT)^{3/2}}\cdot E^{1/2}\cdot e^{-\frac{E}{kT}}\cdot dE$$

$$E = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 \quad \Rightarrow dE = m\mathrm{v}\cdot d\mathrm{v}$$

$$\boxed{D(|\mathrm{v}|)\cdot d\mathrm{v} = N\cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot (kT)^{3/2}}\cdot \left(\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2\right)^{1/2}\cdot e^{-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}}\cdot m\mathrm{v}\cdot d\mathrm{v} = N\cdot \frac{\sqrt{2}\cdot m^{3/2}}{\sqrt{\pi}\cdot (kT)^{3/2}}\cdot \mathrm{v}^2\cdot e^{-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}}\cdot d\mathrm{v}}$$

Pierre-André Besse p.26 2025

Utilisez:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\cdot a^{3/2}} \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2\cdot a^2}$$

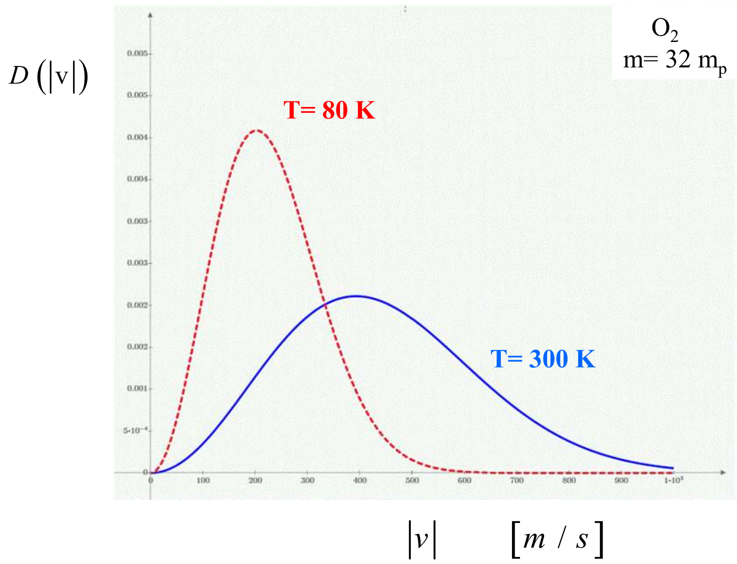
$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\cdot a^{5/2}}$$

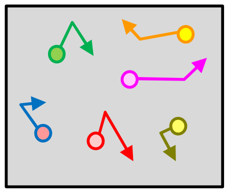
$$\Rightarrow \qquad \int_0^\infty D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v} = N$$

$$\frac{1}{2}m\langle \mathrm{v}^2\rangle = \frac{1}{2}m\cdot \frac{\int_0^\infty \mathrm{v}^2\cdot D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v}}{\int_0^\infty D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v}} = \frac{3}{2}kT$$

$$\langle \mathrm{v}\rangle = \frac{\int_0^\infty \mathrm{v}\cdot D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v}}{\int_0^\infty D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\cdot m}}$$

Exemple: Distribution de Maxwell





Comme exemple, considérons le cas de molécules distinctes mais identiques dans une boite. La dégénérescence correspond à la densité d'états dans cette boite et elle est donnée par la racine carrés de l'énergie. La constante A peut être obtenue en calculant le nombre total de molécules.

Cela permet de déterminer la distribution de l'énergie cinétique ½.mv^2. On peut transformer cette distribution en la distribution de la norme de la vitesse des molécules. Cette fonction est connue sous le nom de distribution de Maxwell.

Vitesse et énergie moyennes

Norme: $$\frac{1}{N}\cdot\int_0^\infty D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v}=1$$

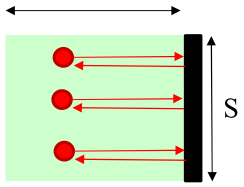
Vitesse moyenne $$\langle \mathrm{v}\rangle=\frac{\int_0^\infty \mathrm{v}\cdot D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v}}{\int_0^\infty D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v}}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi\cdot m}}$$

Energie moyenne: $$\frac{1}{2}m\langle \mathrm{v}^2\rangle=\frac{1}{2}m\cdot\frac{\int_0^\infty \mathrm{v}^2\cdot D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v}}{\int_0^\infty D(\mathrm{v})\cdot d\mathrm{v}}=\frac{3}{2}kT$$

PAB

Gaz parfait

$l_c = v \cdot \tau_c$ Distance intercollisions



Pression

$P \equiv Force/surface = F / S$

$$P \cdot S = F = \frac{N}{6} \cdot \frac{\Delta p}{\tau_c} = \frac{(n \cdot S \cdot l_c)}{6} \cdot \frac{(2 \cdot mv)}{\tau_c}$$

6 directions possibles

$$\Rightarrow \quad P = \frac{2}{3} n \cdot \left(\tfrac{1}{2} mv^2\right) = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{3}{2} kT = n \cdot kT$$

Gaz parfait

$$\boxed{P \cdot V = N \cdot kT = N_{mol.} \cdot R \cdot T}$$

Avogadro

$R = N_a \cdot k$